MBF 2 **Année universitaire 2020–2021**
Mai 2021

Examen d'introduction au calcul stochastique

L'examen dure 1h30. Les calculatrices sont autorisées. Les calculs intermédiaires seront arrondis à 4 chiffres après la virgule. Le barême est donné à titre indicatif (sur 23 points) et peut évoluer. Si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie.

Exercice 1 (*environ 10 minutes, 3 points*) Le prix d'une action est actuellement de 68 euros. Le taux sans risque annuel est estimé à 2 %.

1. Déterminer le prix à terme (*forward*) F à échéance 18 mois de cette action en détaillant le calcul.
2. Déterminer le prix de non-arbitrage d'un contrat à terme sur l'action de maturité 18 mois et de prix d'exercice 70 euros, en détaillant le calcul.
3. Quelle est la différence de raisonnement entre les calculs de ces deux prix (prix à terme et prix de non-arbitrage) ?

Exercice 2 (*environ 15 minutes, 4 points*) Une action cote actuellement 52 €, a une volatilité de 24 % et verse un dividende de taux $1,9$ %. Le taux d'intérêt sans risque vaut 4 % par an. On considère un *call* européen sur cette action, de maturité 10 mois et de prix d'exercice 62 euros. On se place dans le modèle binomial à deux périodes.

1. Tracer l'arbre binomial modélisant l'évolution du prix de cette option pour l'année à venir. Vous mettrez en évidence les valeurs de u et d.
2. Calculer la probabilité p.
3. En déduire la valeur c_0 du call.
4. En utilisant la relation de parité call-put, en déduire la valeur d'une option de vente européenne sur cette action, de mêmes échéance et prix d'exercice.
5. Sans effectuer de calculs,
   (a) Expliquer comment le raisonnement/calcul des questions précédentes aurait été modifié si l'option avait été américaine.
   (b) Aurait-on intérêt à exercer l'option en cas de hausse de l'action à la fin de la première période ?
   On ne demande pas de calculer la valeur de cette option aujourd'hui.
   (c) Aurait-on trouvé une valeur supérieure ou inférieure ? Pourquoi ?

Exercice 3 (*environ 30 minutes, 7 points*)
On se place dans le modèle de Black et Scholes.

1. Considérons une action d'espérance de rentabilité annuelle égale à 25 % et de volatilité annuelle 23 %. On note S_t le cours de cette action à la date t et $\mathrm{L}_t = \ln \mathrm{S}_t$. Quelle est la loi suivie par le processus (L_t) dans 4 ans (en fonction de S_0) ?
2. On s'intéresse à un *put* européen sur cette action, de prix d'exercice 45 euros et d'échéance 4 ans. Quelle doit être la cote initiale de l'action pour que la probabilité que le *put* soit exercé soit inférieure à 10 % ?
3. On suppose à présent que cette action est initialement cotée 42 euros.
   (a) Quelle est la probabilité que l'action dépasse 50 euros dans 4 ans ?
   (b) Donner deux valeurs extrêmes A et B en euros telles qu'il y ait 90 % de chances que le cours de cette action dans 4 ans soit situé entre A et B.

Exercice 4 (*environ 20 minutes, 5 points*) On considère une action dont le cours est modélisé par un processus $(\mathrm{S}_t)_{t\geqslant 0}$ issu du cours initial $\mathrm{S}_0 = 140$, de rentabilité 22 % et de volatilité 19 %. Le taux sans risque est de 3 %.

1. En se plaçant dans le modèle de Black et Scholes, quel type de mouvement brownien suit la valeur S_t de l'action ? On note μ et σ ses paramètres. Que représentent-ils ?
2. On considère un produit dérivé modélisé par un processus $(\mathrm{D}_t)_{t\geqslant 0}$ tel que
$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{D}_t = \frac{\mathrm{e}^{\,r(\mathrm{T}-t)}}{\mathrm{S}_t}$$
Exprimer dD_t et préciser si l'on retrouve un processus connu.
3. En utilisant la formule d'Itô, montrer que le processus $(\ln \mathrm{D}_t)$ suit alors un mouvement brownien généralisé en précisant ses paramètres.
4. Quelle est la loi suivie par le processus $\ln \mathrm{D}_t$, à une certaine date t ?

Exercice 5 (*environ 15 minutes, 4 points*)

Supposons qu'une action ne versant pas de dividendes ait une espérance de rentabilité μ et une volatilité σ. Une institution financière vient d'annoncer la création d'un titre qui verserait à l'échéance T un montant égal à $\mathrm{S}_\mathrm{T} + \ln(\mathrm{S}_\mathrm{T}) + \mathrm{e}^{\,r\mathrm{T}} - \mathrm{K}$, où S_T représente la valeur de l'action à la date T et r est le taux sans risque. On se place dans le modèle de Black et Scholes.

1. Montrer à l'aide de l'évaluation risque-neutre que ce titre a alors pour valeur à l'instant t
$$\mathrm{D}_t = \mathrm{S}_t + \exp[-r(\mathrm{T}-t)]\left[\ln(\mathrm{S}_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\mathrm{T}-t)\right] + \mathrm{e}^{\,rt} - \mathrm{K}\mathrm{e}^{\,-r(\mathrm{T}-t)}$$
Indication : vous pouvez commencer par calculer D_0 *et étendre ensuite à* D_t.
2. Montrer que la valeur $\mathrm{E}_t = (\mathrm{S}_t)^n$ ne satisfait l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes que pour certaines valeurs de n.

Formulaire

Formule d'Itô. Soit $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ un processus d'Itô et f une fonction de (t, X_t) « suffisamment régulière ». Alors le processus stochastique $(\mathrm{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ défini par $\mathrm{Y}_t = f(t, \mathrm{X}_t)$ est un processus d'Itô d'incrément

$$\mathrm{dY}_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{A}(t, \mathrm{X}_t)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_t} + \frac{1}{2}\mathrm{B}^2(t, \mathrm{X}_t)\frac{\partial^2 f}{\partial {\mathrm{X}_t}^2}\right)\mathrm{d}t + \left(\mathrm{B}(t, \mathrm{X}_t)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_t}\right)\mathrm{dW}_t$$

Équation aux dérivées partielles de Black et Scholes. Soit $\mathrm{D}_t = f(t, \mathrm{S}_t)$ la valeur du produit dérivé à l'instant t, supposé ne dépendre que du temps et du prix de l'actif sous-jacent. Si f est une fonction « suffisamment régulière » (elle doit être continûment dérivable par rapport à t et deux fois continûment dérivable par rapport à S_t), alors f satisfait l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes :

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + r\mathrm{S}_t\frac{\partial f}{\partial \mathrm{S}_t} + \frac{1}{2}\sigma^2{\mathrm{S}_t}^2\frac{\partial^2 f}{\partial {\mathrm{S}_t}^2}$$

Dérivées de fonctions classiques

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	condition
x	1	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$	$\frac{6}{x^4}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{n(n+1)}{x^{n+2}}$	$n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$

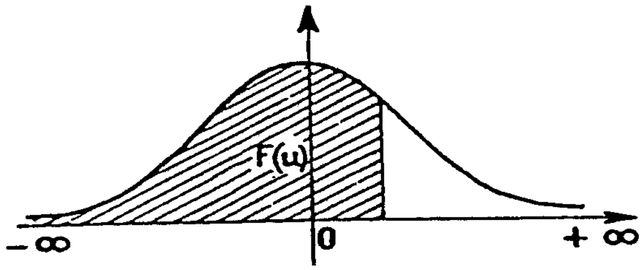
Dérivées de fonctions composées

$f(x)$	$f'(x)$	condition
$(u(x))^n$	$n(u(x))^{n-1}u'(x)$	$n \in \mathbb{N}^*, u(x) \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{(u(x))^n}$	$\frac{-nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}^*, u(x) \neq 0$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$
$\exp(u(x))$	$\exp(u(x))u'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}, v(x) \in \mathbb{R}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$u(x) \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0$

Formules de Black et Scholes. Les valeurs d'un call et d'un put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes (*strike* K, maturité T, valeur initiale du sous-jacent S_0, volatilité σ, taux sans risque r) à l'instant $t \geqslant 0$ sont données par les formules

$$\begin{cases} c_t &= \mathrm{S}_t\mathrm{N}(d_{1,t}) - \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}(d_{2,t}) \\ p_t &= \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}(-d_{2,t}) - \mathrm{S}_t\mathrm{N}(-d_{1,t}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d_{1,t} &= \dfrac{\ln(\mathrm{S}_t/\mathrm{K}) + (r + \sigma^2/2)(\mathrm{T}-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}} \\ d_{2,t} &= d_{1,t} - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-t} \end{cases}$$

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple pour u = 1,37 F(u) = 0,9147
pour u = -1,37 F(u) = 0,0853