Université Paris II **Mathématiques 4**
L2 Economie et Gestion **Cours de Mme HAYEK**

Mai 2021 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 2$, symétrique.
a) Donner la définition de : la matrice A est définie positive.
b) Donner 2 conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice A soit définie positive.
c) Montrer que si A est définie positive alors A est inversible.
d) A^{-1} est-elle définie positive? Justifier la réponse.

Exercice 2
Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Soit $|m| \geq 6$. Calculer dans ce cas les valeurs propres de A en fonction de m.
b) On pose $m = 6$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
c) Même question pour $m = -6$.
d) Soit $|m| < 6$. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
e) On pose $m = 12$.
i) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
ii) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. (Ne pas calculer P^{-1}).

Exercice 3
a) Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
b) Soit $|a| < 1/e$. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n n^n}{n!}$ converge et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n n^n}{n!}$.
c) Montrer que si la série de terme général v_n est une série à termes positifs qui est convergente alors la série de terme général $\dfrac{v_n}{v_n + 1}$ est une série convergente.

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes:
a) $y'(x) + y(x) = 2x + 5, \quad y(0) = 2.$
b) $3y''(x) + 6y'(x) + 3y(x) = xe^{3x}, \quad y(0) = 1/96, \quad y'(0) = 0.$