

Session:	Janvier 2021.
Année d'étude:	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline:	Statistiques 3 (Unité d'Enseignements Fondamentaux 1).
Titulaire du cours:	M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Documents interdits, ainsi que tout autre appareil électronique.

Examen de Statistique 3 (5009): session Janvier 2021. Durée 1h30.

Exercice 1. (2 pts) Choisissez à chaque fois la bonne réponse (sans justifier : recopier simplement le numéro de l'assertion correcte).

I. Sur un univers donné :

1. L'intersection quelconque de tribus est une tribu.
2. L'union dénombrable de tribus est une tribu.

II. Le cas particulier de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$, où $n = 1$, correspond à une loi :

3. $B(2, p)$.
4. de Bernoulli,
5. binomiale négative de paramètres n et p .

III. Si X_1 suit une loi binomiale $B(n_1, p_1)$ et X_2 suit une loi binomiale $B(n_2, p_2)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :

6. $X_1 + X_2$ suit $B(n_1 + n_2, p_1 + p_2)$.
7. $X_1 + X_2$ suit $B(n_1 + n_2, p_1)$ si $p_1 = p_2$.
8. $X_1 + X_2$ suit $B(n_1 + n_2, p_1 + p_2)$ si $p_1 + p_2 < 1$.
9. $X_1 + X_2$ suit $B(n_1 + n_2, \sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1) + n_2 p_2 (1 - p_2)})$.

IV. La loi binomiale peut approcher la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ si

10. N est très grand devant n .
11. $N = n$ et N est très grand.

Exercice 2. (4 pts).

(la précision demandée pour les résultats numériques est de 10^{-3} : donner jusqu'à trois chiffres après la virgule.)

Un jeu de 32 cartes est composé équitablement de cartes de 4 couleurs : trèfle, coeur, carreau et pique. On se placera dans la suite dans différentes situations de jeux (si nécessaire, les cartes sont mélangées avant le jeu et remise à chaque fois dans le jeu et mélangées pour l'étape suivante ou le tour suivant.)

1. Un joueur A tire 4 cartes d'un coup. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trèfles parmi les 4 cartes tirées.

- 1.1 Donner la loi de X .
- 1.2 Donner $P(X = 2)$.
- 1.3 Donner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Un joueur B joue plusieurs fois selon le schéma suivant : il tire à chaque fois 4 cartes d'un coup et note le nombre de trèfles obtenus. Il gagne s'il obtient un nombre de trèfles différent de 2. Il remet les cartes dans le lot, et il tire une nouvelle fois 4 cartes après avoir mélangé les cartes. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre d'expériences nécessaires au joueur B pour qu'il gagne.

- 2.1. Donner la loi de Z ,
- 2.2. Donner $P(Z = 2)$.
- 2.3. Donner $E(Z)$.

3. Un joueur C joue plusieurs fois selon le schéma suivant : il tire à chaque fois 4 cartes d'un coup et note le nombre de trèfles obtenus. Il gagne s'il obtient un nombre de trèfles différent de 2. Il remet les cartes dans le lot, et il tire une nouvelle fois 4 cartes après avoir mélangé les cartes. On note W

la variable aléatoire qui compte le nombre d'expériences nécessaires au joueur C pour qu'il gagne 4 fois.

3.1. Donner la loi de W .

3.2. Donner $E(W)$ et $V(W)$.

Exercice 3. (2 pts) On donne en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie en tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\gamma_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{\alpha}{4}x^2, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ \frac{2x}{2x+1}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Donner les valeurs de α pour lesquelles γ_α est une fonction de répartition.

Exercice 4. (2 pts) On considère deux variables aléatoires X et Y telles que X suit $N(0, 1)$ et Y suit χ_9^2 . On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Considérons la variable aléatoire $Z = 2XY^{-\frac{1}{2}} + 1$,

Donner le fractile d'ordre 0,95 de Z .

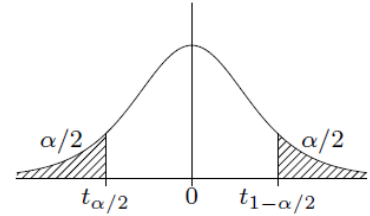
TABLE 6.

Table de la loi T de Student

Si T est une variable aléatoire suivant la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α fixé, la valeur $t_{1-\alpha/2}$ telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geq t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à ν degrés de liberté.



$\nu \backslash \alpha$	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Lorsque $\nu = \infty$, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.