Université Paris II — **Mathématiques 3**
L2 Economie et Gestion — **Cours de Mme HAYEK**
Janvier 2021. 1h30
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Définir $Ker f$ et démontrer que $Ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2
Soit $a \in R$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 4 & -2 & 2a \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est inversible?
b) Calculer sa matrice inverse dans ces cas.
c) Soit $a = 8$, résoudre $AX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
d) Soit m dans R et $\vec{u}_1 = (2, 4, 2)$, $\vec{u}_2 = (0, -2, -4)$ $\vec{u}_3 = (m, 2m, 2)$
Pour quelles valeurs de m, le système est une base de R^3 ?

Exercice 3
Soit f une application de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ telle que:

$$f(\vec{u}) = f(x, y, z) = (x - 3y + z, y, -x - z).$$

a) Montrer que f est une application linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$.
b) f est-elle injective? surjective?
c) Déterminer $Ker f$. Quelle est sa dimension?
d) Quelle est la dimension de $f(I\!R^3)$ (noté aussi $Im f$)? Donner une base de $f(I\!R^3)$.
e) Calculer la matrice A représentant f dans la base canonique de $I\!R^3$ (au départ et à l'arrivée)

Exercice 4
On rappelle que $\mathcal{M}(3, 2)$ est l'espace vectoriel des matrices $(3, 2)$. On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, 2) \ / \ a, b, c \in R\}$$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, 2)$.
b) En donner une base.
c) Que vaut dim $\mathcal{A}$?