

Septembre 2017 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

a) Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Trouver la matrice symétrique A associée à q .

b) Etudier la nature de A .

c) Montrer que A est inversible.

d) Déterminer la nature de A^{-1} sans la calculer.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer les valeurs propres de A en fonction de a .

b) Pour quelles valeurs de a peut-on déjà affirmer que A est diagonalisable dans \mathbb{R} ?

c) On pose $a = 5$. Trouver une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$. (Ne pas calculer P^{-1}).

d) On pose à présent $a = -4$. A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? Justifier la réponse.

Exercice 3

a) Donner un exemple d'une série convergente qui n'est pas absolument convergente.

b) Etudier la convergence des séries de terme général u_n dans les cas suivants:

1) $u_n = \frac{5^n}{n!}$, 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{4n^3 + 5}$.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $2y'(x) - 4y(x) = 3x$, $y(0) = \frac{1}{8}$.

b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 18e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.